Correction : base de l'espace

www.bossetesmaths.com

✎ Exercice 1

$\boxed{\text{Vecteurs } \vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix},\ \vec{v}\begin{pmatrix}-3\\9\\6\end{pmatrix} \text{ et } \vec{w}\begin{pmatrix}3\\-10\\2\end{pmatrix}}$.

On constate que $\vec{v} = -3\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
donc $\boxed{\vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ ne forment pas une base de l'espace}}$.

✎ Exercice 2

$\boxed{\text{Vecteurs } \vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix},\ \vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix} \text{ et } \vec{w}\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}}$.

1) • Montrons d'abord que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

On a $-1\times(-2) = 2$ mais $-1\times(-2) = 2 \neq 3$ donc <u>les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.</u>

• Montrons ensuite que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

Cherchons deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases}1 = -\alpha + 2\beta\\ 2 = -\alpha + 3\beta\\ -5 = 3\alpha - 2\beta\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha = 2\beta - 1\\ 2 = -(2\beta - 1) + 3\beta\\ -5 = 3(2\beta - 1) - 2\beta\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha = 2\beta - 1\\ 2 = -2\beta + 1 + 3\beta\\ -5 = 6\beta - 3 - 2\beta\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha = 2\beta - 1\\ 2 = \beta + 1\\ -5 = 4\beta - 3\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha = 2\beta - 1\\ \beta = 2 - 1\\ 4\beta = -5 + 3\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha = 2\beta - 1\\ \beta = 1\\ 4\beta = -2\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha = 2\beta - 1\\ \beta = 1\\ \beta = \dfrac{-2}{4}\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha = 2\beta - 1\\ \beta = 1\\ \beta = -\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Absurde ! Donc <u>les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires</u>

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ forment une base de l'espace}}$.

2) $\boxed{\text{Vecteur } \vec{t}\begin{pmatrix}-4\\-3\\4\end{pmatrix}}$.

On cherche 3 réels x, y et z tels que $\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases}-4 = -x + 2y + z\\ -3 = -x + 3y + 2z\\ 4 = 3x - 2y - 5z\end{cases} \iff \begin{cases}x = 2y + z + 4\\ -3 = -(2y + z + 4) + 3y + 2z\\ 4 = 3(2y + z + 4) - 2y - 5z\end{cases} \iff \begin{cases}x = 2y + z + 4\\ -3 = -2y - z - 4 + 3y + 2z\\ 4 = 6y + 3z + 12 - 2y - 5z\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x = 2y + z + 4\\ -3 + 4 = y + z\\ 4 - 12 = 4y - 2z\end{cases} \iff \begin{cases}x = 2y + z + 4\\ y + z = 1\\ 4y - 2z = -8\end{cases} \iff \begin{cases}x = 2y + z + 4\\ y + z = 1\\ 2y - z = -4\end{cases} \iff \begin{cases}x = 2y + z + 4\\ y = 1 - z\\ 2(1 - z) - z = -4\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x = 2y + z + 4\\ y = 1 - z\\ 2 - 2z - z = -4\end{cases} \iff \begin{cases}x = 2y + z + 4\\ y = 1 - z\\ -3z = -4 - 2\end{cases} \iff \begin{cases}x = 2y + z + 4\\ y = 1 - z\\ -3z = -6\end{cases} \iff \begin{cases}x = 2y + z + 4\\ y = 1 - z\\ z = \dfrac{-6}{-3}\end{cases}$$

$\iff \begin{cases} x = 2y + z + 4 \\ y = 1 - 2 \\ z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \times (-1) + 2 + 4 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\cancel{2} + \cancel{2} + 4 \\ y = -1 \\ z = 2 \iff \end{cases} \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}.$

Donc $\boxed{\vec{t}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ dans la base } (\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})}$.