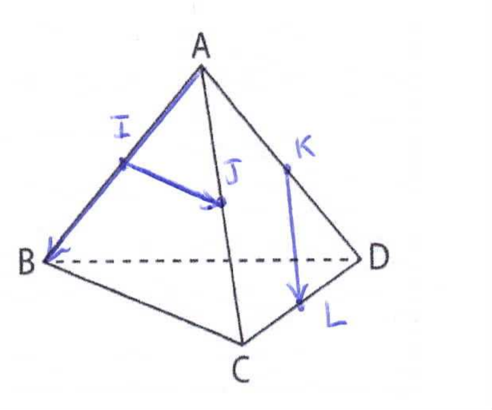
Correction : coplanarité de 3 vecteurs de l'espace

www.bossetesmaths.com

✎ Exercice 1



$ABCD$ tétraèdre et I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ et $[CD]$.

1) $\boxed{\overrightarrow{IJ}} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} \boxed{= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$.

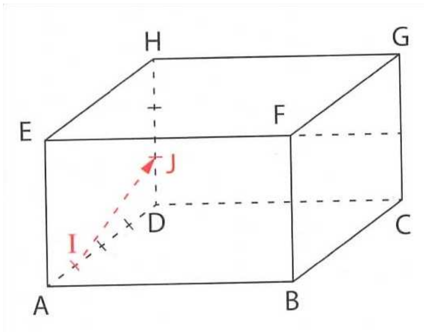
2) Dans le triangle DAC, K est le milieu de $[DA]$ et L est le milieu de $[DC]$.

D'après un théorème des milieux (vu au collège), on a bien : $\boxed{\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$.

3) On a donc : $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KL}$ avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KL}$ deux vecteurs non colinéaires (voir figure).

On conclut que $\boxed{\text{les vecteurs } \overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{KL} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont coplanaires}}$.

✎ Exercice 2



$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.

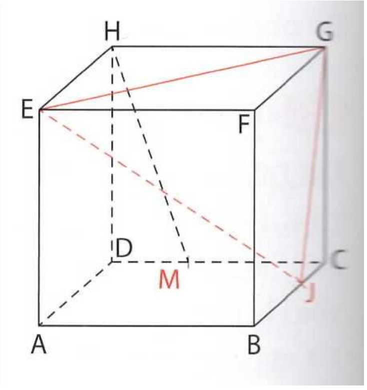
I et J sont les points définis par : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.

On a : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{4}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BF}$.

Ainsi : $\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BF}$ avec $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$ deux vecteurs non colinéaires (voir figure).

On conclut que $\boxed{\text{les vecteurs } \overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{BF} \text{ sont coplanaires}}$.

✎ Exercice 3



$ABCDEFGH$ est un cube.

Le point M est défini par $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

Le point J est défini par $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1) $\boxed{\overrightarrow{HM}} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DM}$

$= \overrightarrow{GC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$

$= \overrightarrow{GJ} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF}\right)$

$= \overrightarrow{GJ} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GF}$

$= \overrightarrow{GJ} + \cancel{\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}} - \frac{1}{3}\overrightarrow{GE} - \cancel{\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}}$

$\boxed{= -\frac{1}{3}\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GJ}}$.

2) Les vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GJ}$ étant non coplanaires (voir figure), on en déduit que $\boxed{\text{les vecteurs } \overrightarrow{HM}, \overrightarrow{GE} \text{ et } \overrightarrow{GJ} \text{ sont coplanaires}}$.