Correction : position relative d'une courbe et d'une tangente

www.bossetesmaths.com

✎ Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{4}{x}$ de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé du plan.

1) La tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

* $f(1) = \dfrac{4}{1} = 4$;

* $f(x) = \dfrac{4}{x} = 4 \times \dfrac{1}{x}$ donc $f'(x) = 4 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{4}{x^2}$ d'où $f'(1) = -\dfrac{4}{1^2} = -\dfrac{4}{1} = -4$.

Alors $T : y = -4(x-1)+4 \iff y = -4x+4+4 \iff \boxed{y = -4x+8}$.

2) Pour tout $x \in \mathbf{R}^*$: $f(x) - (-4x+8) = \dfrac{4}{x} + 4x - 8 = \dfrac{4}{x} + \dfrac{4x^2}{x} - \dfrac{8x}{x} = \dfrac{4x^2 - 8x + 4}{x} = \dfrac{4(x^2-2x+1)}{x} = \dfrac{4(x-1)^2}{x}$.

* $4 > 0$ donc 4 n'influe pas dans le signe de $f(x) - (-4x+8)$;

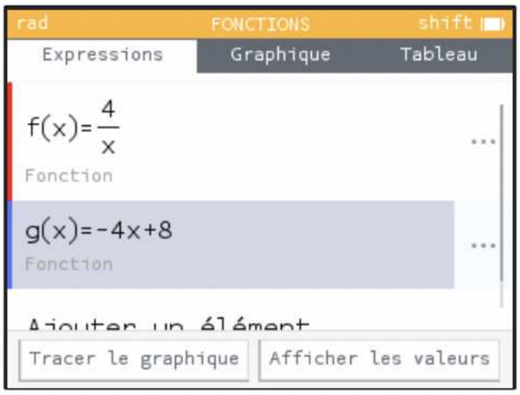
* $(x-1)^2 = 0 \iff x - 1 = 0$ (produit nul) $\iff x = 1$; de plus, $(x-1)^2$ est un carré donc toujours positif.

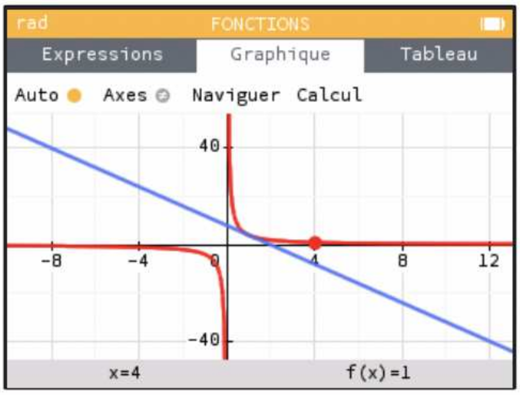
On peut dresser le tableau de signes de $f(x) - (-4x+8)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	‖	$+$	0	$+$	
x		$-$	‖	$+$		$+$	$(m=1)$
$f(x)-(-4x+8)$		$-$	‖	$+$	0	$+$	

- $f(x) - (-4x+8) > 0 \iff x \in]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ donc $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de sa tangente T sur $]0\ ;\ 1[$ et sur $]1\ ;\ +\infty[$.
- $f(x) - (-4x+8) = 0 \iff x = 1$ donc $\mathscr{C}_f$ et T se coupent au point d'abscisse 1 (il s'agit du point de tangence).
- $f(x) - (-4x+8) < 0 \iff x \in]-\infty\ ;\ 0[$ donc $\mathscr{C}_f$ est strictement en-dessous de T sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

Vérification graphique à la calculatrice Numworks :





✎ Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \{2\}$ par $g(x) = \dfrac{2x+5}{x-2}$ de courbe représentative $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormé du plan.

1) La tangente T à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse -1 a pour équation $y = g'(-1)(x-(-1)) + g(-1)$.

* $g(-1) = \dfrac{2 \times (-1)+5}{-1-2} = \dfrac{-2+5}{-3} = \dfrac{3}{-3} = -1$;

* $g(x) = \dfrac{2x+5}{x-2}$ donc $g = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x+5$ et $v(x) = x-2$. Alors $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$.

$g' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ donc, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $g'(x) = \dfrac{2(x-2)-(2x+5)\times 1}{(x-2)^2} = \dfrac{2x-4-(2x+5)}{(x-2)^2} = \dfrac{2x-4-2x-5}{(x-2)^2}$

$g'(x) = \dfrac{-9}{(x-2)^2}$. Ainsi $g'(-1) = \dfrac{-9}{(-1-2)^2} = \dfrac{-9}{(-3)^2} = \dfrac{-9}{9} = -1$.

Alors $T : y = -1(x+1)-1 \iff y = -x-1-1 \iff \boxed{y = -x-2}$.

2) Pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$: $g(x) - (-x-2) = \dfrac{2x+5}{x-2} + x + 2 = \dfrac{2x+5+(x+2)(x-2)}{x-2} = \dfrac{2x+5+x^2-2^2}{x-2} = \dfrac{2x+5+x^2-4}{x-2}$

$g(x)-(-x-2) = \dfrac{x^2+2x+1}{x-2} = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$.

* $(x+1)^2 = 0 \iff x+1 = 0$ (produit nul) $\iff x = -1$; de plus, $(x+1)^2$ est un carré donc toujours positif.

* $x-2 = 0 \iff x = 2$.

On peut dresser le tableau de signes de $g(x)-(-x-2)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$(x+1)^2$		+	0	+	|	+	
$x-2$		−	|	−	0	+	$(m=1)$
$g(x)-(-x-2)$		−	0	−	‖	+	

- $g(x)-(-x-2) > 0 \iff x \in]2\ ;\ +\infty[$ donc $\mathscr{C}_g$ est strictement au-dessus de sa tangente T sur $]2\ ;\ +\infty[$.
- $g(x)-(-x-2) = 0 \iff x = -1$ donc $\mathscr{C}_g$ et T se coupent au point d'abscisse -1 (il s'agit du point de tangence).
- $g(x)-(-x-2) < 0 \iff x \in]-\infty\ ;\ -1[\cup]-1\ ;\ 2[$ donc $\mathscr{C}_g$ est strictement en-dessous de T sur $]-\infty\ ;\ -1[$ et sur $]-1\ ;\ 2[$.

Vérification graphique à la calculatrice TI :