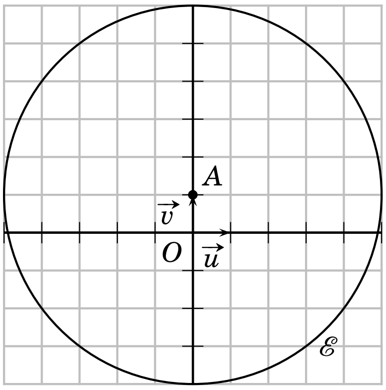
Correction : module d'un nombre complexe et ensembles de points

www.bossetesmaths.com

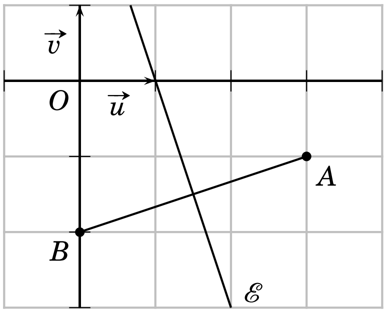
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

✎ Exercice 1

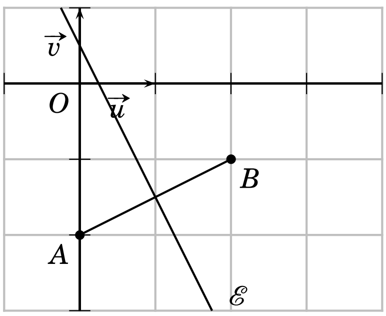
a) $|z-i|=5$. Notons $A(i)$. Alors : $|z-i|=5 \iff |z_M-z_A|=5 \iff AM=5$. $\boxed{\mathscr{E} \text{ est le cercle de centre } A \text{ et de rayon } 5}$.



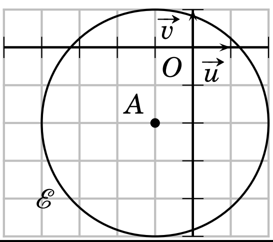
b) $|z-3+i|=|z+2i| \iff |z-(3-i)|=|z-(-2i)|$. Notons $A(3-i)$ et $B(-2i)$.
Alors : $|z-3+i|=|z+2i| \iff |z_M-z_A|=|z_M-z_B| \iff AM=BM$. $\boxed{\mathscr{E} \text{ est la médiatrice du segment } [AB]}$.



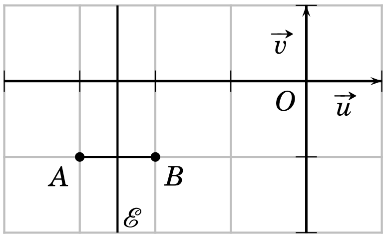
c) $|4z+8i|=4|z-2+i| \iff |4(z+2i)|=4|z-2+i| \iff 4|z-(-2i)|=4|z-(2-i)| \iff |z-(-2i)|=|z-(2-i)|$.
Notons $A(-2i)$ et $B(2-i)$.
Alors : $|4z+8i|=4|z-2+i| \iff |z_M-z_A|=|z_M-z_B| \iff AM=BM$. $\boxed{\mathscr{E} \text{ est la médiatrice du segment } [AB]}$.



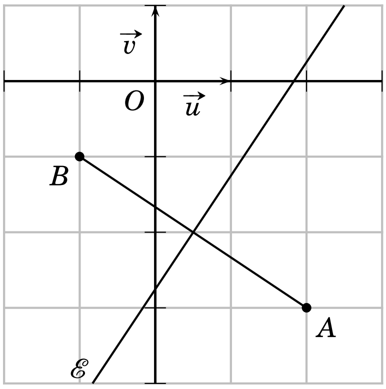
d) $|\overline{z}+1-2i|=3 \iff \left|\overline{z+1+2i}\right|=3 \iff |z+1+2i|=3 \iff |z-(-1-2i)|=3$. Notons $A(-1-2i)$.
Alors : $|\overline{z}+1-2i|=3 \iff |z_M-z_A|=3 \iff AM=3$. $\boxed{\mathscr{E} \text{ est le cercle de centre } A \text{ et de rayon } 3}$.



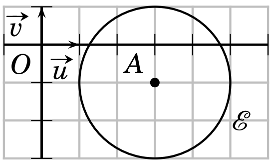
e) $|i\overline{z}+1+3i| = |z+2+i| \iff \left|i\left(\overline{z}+\frac{1}{i}+3\right)\right| = |z+2+i| \iff |i|\times|\overline{z}-i+3| = |z+2+i| \iff 1\times\left|\overline{z+i+3}\right| = |z+2+i|$
$\iff |z+3+i| = |z+2+i| \iff |z-(-3-i)| = |z-(-2-i)|$. Notons $A(-3-i)$ et $B(-2-i)$.
Alors : $|i\overline{z}+1+3i| = |z+2+i| \iff |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \iff AM = BM$. $\boxed{\mathscr{E} \text{ est la médiatrice du segment } [AB]}$.



f) $|z-2+3i| = |z+1+i| \iff |z-(2-3i)| = |z-(-1-i)|$. Notons $A(2-3i)$ et $B(-1-i)$.
Alors : $|z-2+3i| = |z+1+i| \iff |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \iff AM = BM$. $\boxed{\mathscr{E} \text{ est la médiatrice du segment } [AB]}$.



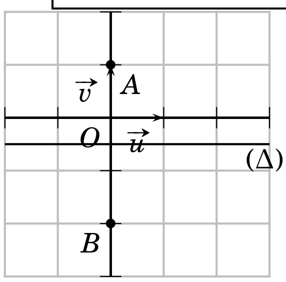
g) $|z-3+i| = 2 \iff |z-(3-i)| = 2$. Notons $A(3-i)$. Alors : $|z-3+i| = 2 \iff |z_M - z_A| = 2 \iff AM = 2$.
$\boxed{\mathscr{E} \text{ est le cercle de centre } A \text{ et de rayon } 2}$.



✎ Exercice 2 (Spécial Bac !)

1) [Métropôle juin 2013] : "L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|z-i| = |z+1|$ est une droite".
$|z-i| = |z+1| \iff |z-i| = |z-(-1)|$. Notons $A(i)$ et $B(-1)$.
Alors : $|z-i| = |z+1| \iff |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \iff AM = BM$.
L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment $[AB]$ qui est bien une droite. $\boxed{\text{L'affirmation est vraie}}$.

2) [Polynésie juin 2011] : "Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-i| = |z+2i|$. Alors (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels".
$|z-i| = |z+2i| \iff |z-i| = |z-(-2i)|$. Notons $A(i)$ et $B(-2i)$.
Alors : $|z-i| = |z+2i| \iff |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \iff AM = BM$.
L'ensemble (Δ) est donc la médiatrice du segment $[AB]$.
(Δ) est bien une droite parallèle à l'axe des réels et $\boxed{\text{l'affirmation est vraie}}$.



3) [Métropôle juin 2011] : "On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_A = 1$; $z_B = i$; $z_C = -1$ et $z_D = -i$. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z+i| = |z-1|$?"

$|z+i| = |z-1| \iff |z-(-i)| = |z-1|$. Avec les points $D(-i)$ et $A(1)$, on a :

$|z+i| = |z-1| \iff |z_M - z_D| = |z_M - z_A| \iff DM = AM$.

L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment $[AD]$ et $\boxed{\text{la bonne réponse est la réponse } \mathbf{d)}}$.