Correction : milieu d'un segment

www.bossetesmaths.com

✎ Exercice 1

a) $\boxed{A\,(-3\,;\,4) \text{ et } B\,(7\,;\,2)}$. M est le milieu du segment $[AB]$, on a donc :

* $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-3+7}{2} = \dfrac{4}{2} = 2\,;$
* $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{4+2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3.$

Donc $\boxed{M\,(2\,;\,3)}$.

b) $\boxed{A\,(1\,;\,-2) \text{ et } B\,(-1\,;\,-4)}$. M est le milieu du segment $[AB]$, on a donc :

* $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1-1}{2} = \dfrac{0}{2} = 0\,;$
* $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-2-4}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3.$

Donc $\boxed{M\,(0\,;\,-3)}$.

✎ Exercice 2

a) $\boxed{A\,(2\,;\,-3) \text{ et } I\,(4\,;\,3)}$. I est le milieu du segment $[AB]$, on a donc :

$x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$	$y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$	
$\Leftrightarrow 4 = \dfrac{2 + x_B}{2}$	$\Leftrightarrow 3 = \dfrac{-3 + y_B}{2}$	
$\Leftrightarrow 4 \times 2 = 2 + x_B$	$\Leftrightarrow 3 \times 2 = -3 + y_B$	
$\Leftrightarrow 2 + x_B = 8$	$\Leftrightarrow -3 + y_B = 6$	Donc $\boxed{B\,(6\,;\,9)}$.
$\Leftrightarrow x_B = 8 - 2$	$\Leftrightarrow y_B = 6 + 3$	
$\Leftrightarrow x_B = 6.$	$\Leftrightarrow y_B = 9.$	

b) $\boxed{A\,(-1\,;\,-2) \text{ et } I\,(5\,;\,0)}$. I est le milieu du segment $[AB]$, on a donc :

$x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$	$y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$	
$\Leftrightarrow 5 = \dfrac{-1 + x_B}{2}$	$\Leftrightarrow 0 = \dfrac{-2 + y_B}{2}$	
$\Leftrightarrow 5 \times 2 = -1 + x_B$	$\Leftrightarrow 0 \times 2 = -2 + y_B$	
$\Leftrightarrow -1 + x_B = 10$	$\Leftrightarrow -2 + y_B = 0$	Donc $\boxed{B\,(11\,;\,2)}$.
$\Leftrightarrow x_B = 10 + 1$	$\Leftrightarrow y_B = 0 + 2$	
$\Leftrightarrow x_B = 11.$	$\Leftrightarrow y_B = 2.$	

✎ Exercice 3

$\boxed{A\,(1\,;\,2),\ I\,(-2\,;\,0),\ R\,(-1\,;\,-3) \text{ et } E\,(2\,;\,-1)}$.

1) * M milieu de $[AR]$ donc :

$x_M = \dfrac{x_A + x_R}{2} = \dfrac{1-1}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_R}{2} = \dfrac{2-3}{2} = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$. Ainsi $\boxed{M\left(0\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)}$.

* N milieu de $[IE]$ donc :

$x_N = \dfrac{x_I + x_E}{2} = \dfrac{-2+2}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$ et $y_N = \dfrac{y_I + y_E}{2} = \dfrac{0-1}{2} = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$. Ainsi $\boxed{N\left(0\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)}$.

2) D'après la question précédente, comme M et N ont les mêmes coordonnées, alors ils sont confondus.
Donc le quadrilatère $AIRE$ a ses diagonales $[AR]$ et $[IE]$ qui se coupent en leur milieu.
Par conséquent, $\boxed{AIRE \text{ est un parallélogramme}}$.

✎ Exercice 4

$\boxed{K(-3~;~4),\ L(2~;~6) \text{ et } M(5~;~-1)}$.

1) Notons J le milieu de $[KM]$. Alors :
$x_J = \dfrac{x_K + x_M}{2} = \dfrac{-3+5}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ et $y_J = \dfrac{y_K + y_M}{2} = \dfrac{4-1}{2} = \dfrac{3}{2}$. Ainsi $\boxed{J\left(1~;~\dfrac{3}{2}\right)}$. Or $I\left(1~;~\dfrac{3}{2}\right)$.

I et J ayant les mêmes coordonnées, ils sont donc confondus et ainsi $\boxed{I\left(1~;~\dfrac{3}{2}\right) \text{ est le milieu de } [KM]}$.

2) $KLMN$ est un parallélogramme $\iff$ I milieu de $[LN]$ $\iff \begin{cases} x_I = \dfrac{x_L + x_N}{2} \\ y_I = \dfrac{y_L + y_N}{2} \end{cases}$.

$x_I = \dfrac{x_L + x_N}{2}$	$y_I = \dfrac{y_L + y_N}{2}$
$\iff 1 = \dfrac{2 + x_N}{2}$	$\iff \dfrac{3}{2} = \dfrac{6 + y_N}{2}$
$\iff 1 \times 2 = 2 + x_N$	$\iff \dfrac{3}{\cancel{2}} \times \cancel{2} = 6 + y_N$
$\iff 2 + x_N = 2$	$\iff 6 + y_N = 3$
$\iff x_N = 2 - 2$	$\iff y_N = 3 - 6$
$\iff x_N = 0$	$\iff y_N = -3.$

On a donc : $\boxed{N(0~;~-3)}$.

✎ Exercice 5

$\boxed{R(2~;~1),\ S(0~;~-1) \text{ et } T(4~;~3)}$.

1) Vérifions si R est le milieu de $[ST]$. Soit M le milieu de $[ST]$, alors :
$x_M = \dfrac{x_S + x_T}{2} = \dfrac{0+4}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $y_M = \dfrac{y_S + y_T}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$. Ainsi $M(2~;~1)$. Or $R(2~;~1)$.
R et M ayant les mêmes coordonnées, ils sont donc confondus et ainsi $R(2~;~1)$ est le milieu de $[ST]$.
Donc $\boxed{\text{les points } S \text{ et } T \text{ sont symétriques par rapport au point } R}$.

2) Le point P est le symétrique de R par rapport à S $\iff$ S est le milieu de $[PR]$ $\iff \begin{cases} x_S = \dfrac{x_P + x_R}{2} \\ y_S = \dfrac{y_P + y_R}{2} \end{cases}$.

$x_S = \dfrac{x_P + x_R}{2}$	$y_S = \dfrac{y_P + y_R}{2}$
$\iff 0 = \dfrac{x_P + 2}{2}$	$\iff -1 = \dfrac{y_P + 1}{2}$
$\iff 0 \times 2 = x_P + 2$	$\iff -1 \times 2 = y_P + 1$
$\iff x_P + 2 = 0$	$\iff y_P + 1 = -2$
$\iff x_P = 0 - 2$	$\iff y_P = -2 - 1$
$\iff x_P = -2$	$\iff y_P = -3.$

On a donc : $\boxed{P(-2~;~-3)}$.