Correction : forme canonique

www.bossetesmaths.com

✎ Exercice

a) $\boxed{f(x) = -4x^2 - 28x + 15}$

1) $f(x) = -4x^2 - 28x + 15 = -4\left(x^2 + 7x - \frac{15}{4}\right) = -4\left[\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} - \frac{15}{4}\right] = -4\left[\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{64}{4}\right] = \boxed{-4\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + 64}$.

2) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 \geqslant 0 \Rightarrow -4\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 \leqslant 0 \Rightarrow -4\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + 64 \leqslant 0 + 64 \Rightarrow f(x) \leqslant 64$.

Or $f\left(-\frac{7}{2}\right) = -4 \times \left(-\frac{7}{2} + \frac{7}{2}\right)^2 + 64 = 0 + 64 = 64$.

Donc $\boxed{f \text{ admet un maximum sur } \mathbf{R}\text{ ; ce maximum vaut 64 et il est atteint en } -\frac{7}{2}}$.

3) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = -4\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + 64 = 64 - 4\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = 8^2 - \left[2\left(x + \frac{7}{2}\right)\right]^2 = \left[8 + 2\left(x + \frac{7}{2}\right)\right]\left[8 - 2\left(x + \frac{7}{2}\right)\right]$

$f(x) = (8 + 2x + 7)(8 - 2x - 7) = \boxed{(2x + 15)(1 - 2x)}$.

b) $\boxed{f(x) = 9x^2 - 36x + 32}$

1) $f(x) = 9x^2 - 36x + 32 = 9\left(x^2 - 4x + \frac{32}{9}\right) = 9\left[(x-2)^2 - 4 + \frac{32}{9}\right] = 9\left[(x-2)^2 - \frac{36}{9} + \frac{32}{9}\right] = 9\left[(x-2)^2 - \frac{4}{9}\right] = \boxed{9(x-2)^2 - 4}$.

2) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(x-2)^2 \geqslant 0 \Rightarrow 9(x-2)^2 \geqslant 0 \Rightarrow 9(x-2)^2 - 4 \geqslant 0 - 4 \Rightarrow f(x) \geqslant -4$.

Or $f(2) = 9 \times (2-2)^2 - 4 = 0 - 4 = -4$.

Donc $\boxed{f \text{ admet un minimum sur } \mathbf{R}\text{ ; ce minimum vaut } -4 \text{ et il est atteint en } 2}$.

3) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 9(x-2)^2 - 4 = [3(x-2)]^2 - 2^2 = [3(x-2)+2][3(x-2)-2] = (3x-6+2)(3x-6-2) = \boxed{(3x-4)(3x-8)}$.

c) $\boxed{f(x) = -x^2 + 3x}$

1) $f(x) = -x^2 + 3x = -(x^2 - 3x) = -\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] = \boxed{-\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}}$.

2) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0 \Rightarrow -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \leqslant 0 \Rightarrow -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leqslant 0 + \frac{9}{4} \Rightarrow f(x) \leqslant \frac{9}{4}$.

Or $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} = 0 + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$.

Donc $\boxed{f \text{ admet un maximum sur } \mathbf{R}\text{ ; ce maximum vaut } \frac{9}{4} \text{ et il est atteint en } \frac{3}{2}}$.

3) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = -x^2 + 3x = \boxed{-x(x-3)}$.

d) $\boxed{f(x) = x^2 - 8x + 26}$

1) $f(x) = x^2 - 8x + 26 = (x-4)^2 - 16 + 26 = \boxed{(x-4)^2 + 10}$.

2) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(x-4)^2 \geqslant 0 \Rightarrow (x-4)^2 + 10 \geqslant 0 + 10 \Rightarrow f(x) \geqslant 10$.

Or $f(4) = (4-4)^2 + 10 = 0 + 10 = 10$.

Donc $\boxed{f \text{ admet un minimum sur } \mathbf{R}\text{ ; ce minimum vaut 10 et il est atteint en 4}}$.

3) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = (x-4)^2 + 10$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas factorisable dans } \mathbf{R}}$.

e) $\boxed{f(x) = -9x^2 + 90x - 176}$

1) $f(x) = -9x^2 + 90x - 176 = -9\left(x^2 - 10x + \frac{176}{9}\right) = -9\left[(x-5)^2 - 25 + \frac{176}{9}\right] = -9\left[(x-5)^2 - \frac{225}{9} + \frac{176}{9}\right] = -9\left[(x-5)^2 - \frac{49}{9}\right]$

$f(x) = \boxed{-9(x-5)^2 + 49}$.

2) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(x-5)^2 \geqslant 0 \Rightarrow -9(x-5)^2 \leqslant 0 \Rightarrow -9(x-5)^2+49 \leqslant 0+49 \Rightarrow f(x) \leqslant 49$.

Or $f(5) = -9 \times (5-5)^2 + 49 = 0 + 49 = 49$.

Donc $\boxed{f \text{ admet un maximum sur } \mathbf{R}\text{ ; ce maximum vaut 49 et il est atteint en 5}}$.

3) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = -9(x-5)^2 + 49 = 49 - 9(x-5)^2 = 7^2 - [3(x-5)]^2 = [7+3(x-5)][7-3(x-5)]$

$f(x) = (7+3x-15)(7-3x+15) = \boxed{(3x-8)(22-3x)}$.