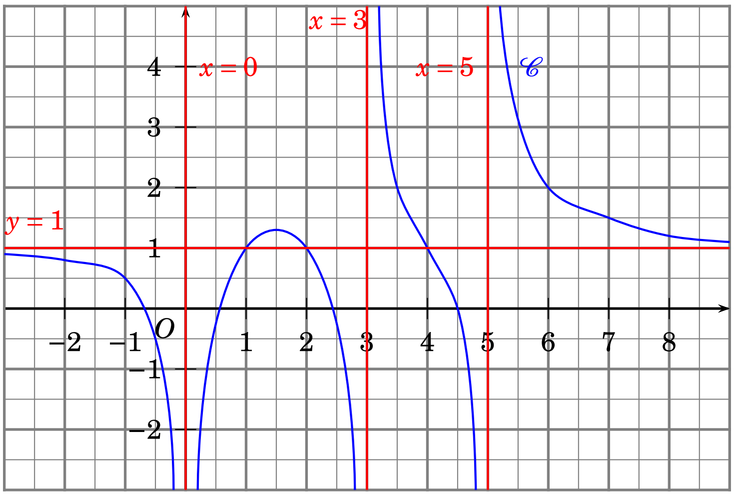
Correction : asymptotes

www.bossetesmaths.com

✎ Exercice 1 (A partir d'une courbe)

1) La courbe bleue $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f. Voici en rouge les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$:



a) Graphiquement, on peut constater que f est définie sur $\boxed{]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ 3[\cup]3\ ;\ 5[\cup]5\ ;\ +\infty[}$.

On obtient les limites suivantes :

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = -\infty}$.

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = +\infty}$.

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} f(x) = +\infty}$.

b) Asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$:

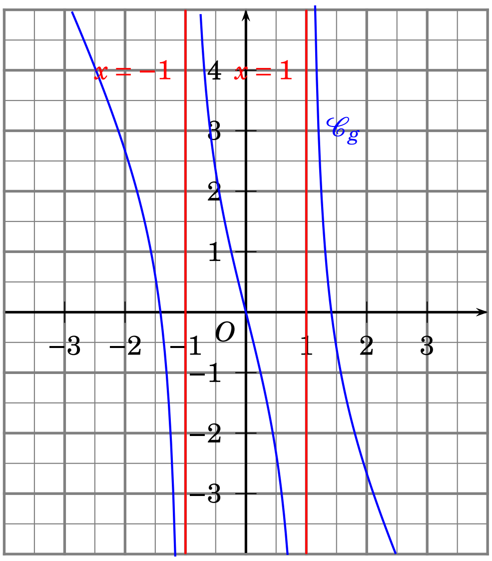
* Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

* Comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

* Comme $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

* Comme $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = 5$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

2) Voici la courbe représentative de g en bleu et les asymptotes à $\mathscr{C}_g$ en rouge :



a) Graphiquement, on obtient les limites suivantes :

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$ (donc la courbe $\mathscr{C}_g$ n'a pas d'asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$).

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} g(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x) = +\infty}$.

Donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_g$.

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} g(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} g(x) = +\infty}$.

Donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_g$.

b) g est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\ ;\ 1\}$ par $\boxed{g(x) = \dfrac{4x-2x^3}{x^2-1}}$.

En $-\infty$ et en $+\infty$: Comme g est une fonction rationnelle :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} (-2x) = +\infty$$

et, de la même manière, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-2x) = -\infty$.

Pour les limites en -1 et en 1, étudions le signe du dénominateur x^2-1.

Ses racines sont -1 et 1, et comme il s'agit d'un trinôme du second degré, avec $a=1$ (donc $a>0$), voici son tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

(Le trinôme est du signe de a sauf entre les racines).

En -1 :

* $\lim\limits_{x\to-1}(4x-2x^3)=4\times(-1)-2\times(-1)^3=-4-2\times(-1)=-4+2=-2$.

* $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}(x^2-1)=0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}g(x)=-\infty$.

* $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}(x^2-1)=0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}g(x)=+\infty$.

En 1 :

* $\lim\limits_{x\to1}(4x-2x^3)=4\times1-2\times1^3=4-2\times1=4-2=2$.

* $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(x^2-1)=0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}g(x)=-\infty$.

* $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x^2-1)=0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}g(x)=+\infty$.

✎ Exercice 2 (A partir d'un tableau de variations)

Notons $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

a) Tableau 1 : $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ donc la droite d'équation $y=-2$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

b) Tableau 2 : $\mathscr{D}_f=]2\ ;\ +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ donc la droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

c) Tableau 3 : $\mathscr{D}_f=]-\infty\ ;\ -2[\cup]-2\ ;\ +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=3$ donc la droite d'équation $y=3$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x=-2$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ (donc $\mathscr{C}_f$ n'a pas d'asymptote horizontale en $+\infty$).

d) Tableau 4 :$\mathscr{D}_f=]-\infty\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ donc la droite d'équation $y=-1$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ donc la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

✎ Exercice 3 (A partir des limites)

1) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+5}$ avec $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}=]-\infty\ ;\ +\infty[$. Comme f est une fonction rationnelle :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}=0$ et, de la même manière, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$.

Donc la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) $f(x)=\dfrac{1-6x}{2x-4}$ avec $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}=]-\infty\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[$.

En $-\infty$ et en $+\infty$: Comme f est une fonction rationnelle :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x}{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6}{2}=-3$ et, de la même manière, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-6}{2}=-3$.

Donc la droite d'équation $y=-3$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

En 2 : Etudions le signe du dénominateur $2x-4$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$	0	$+$	$(a=2)$

(On met le signe de a à droite du zéro).

* $\lim\limits_{x\to 2}(1-6x)=1-6\times 2=1-12=-11$.
* $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}}(2x-4)=0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}}f(x)=+\infty$.
* $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}}(2x-4)=0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}}f(x)=-\infty$.

Donc la droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

3) $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x+3}}$ avec $\mathscr{D}_f=]-3\ ;\ +\infty[$.

<u>En -3</u> :

$\lim\limits_{\substack{x\to -3\\x>-3}}(x+3)=0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\x>-3}}\sqrt{x+3}=\lim\limits_{\substack{X\to 0\\X>0}}\sqrt{X}=\sqrt{0}=0^+$.

Par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\x>-3}}f(x)=+\infty$. Donc la droite d'équation $x=-3$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

<u>En $+\infty$</u> : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}=\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ et, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Donc la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

4) $f(x)=\dfrac{4x^3}{x^2-x-2}$ avec $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\ ;\ 2\}=]-\infty\ ;\ -1[\cup]-1\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[$.

<u>En $-\infty$ et en $+\infty$</u> : Comme f est une fonction rationnelle :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}4x=-\infty$ et, de la même manière, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}4x=+\infty$.

Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ n'a pas d'asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.

<u>Pour les limites en -1 et en 2</u>, étudions le signe du dénominateur x^2-x-2.

Ses racines sont -1 et 2 (calculer $\Delta=9$, $x_1=-1$ et $x_2=2$), et comme il s'agit d'un trinôme du second degré, avec $a=1$ (donc $a>0$), voici son tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

(Le trinôme est du signe de a sauf entre les racines).

<u>En -1</u> :

* $\lim\limits_{x\to -1}(4x^3)=4\times(-1)^3=4\times(-1)=-4$.
* $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\x<-1}}(x^2-x-2)=0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\x<-1}}f(x)=-\infty$.
* $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\x>-1}}(x^2-x-2)=0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\x>-1}}f(x)=+\infty$.

Donc la droite d'équation $x=-1$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

<u>En 2</u> :

* $\lim\limits_{x\to 2}(4x^3)=4\times 2^3=4\times 8=32$.
* $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}}(x^2-x-2)=0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}}f(x)=-\infty$.
* $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}}(x^2-x-2)=0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}}f(x)=+\infty$.

Donc la droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

5) $f(x)=3x^2+1-\dfrac{1}{x}$ avec $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}^*=]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$.

<u>En $-\infty$ et en $+\infty$</u> : $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^2-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$. Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ n'a pas d'asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.

<u>En 0</u> : $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2-1)=3\times 0^2-1=-1$.

* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$. Par somme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}f(x)=+\infty$.
* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$. Par somme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=-\infty$.

Donc la droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.